

УДК 539.374.001.8.

Чигиринский В. В.  
Матюхин А. Ю.**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОСАДКИ ПОЛЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ  
В УСЛОВИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ**

Представляет теоретический и практический интерес процесс осадки полых тел вращения, который используется при изготовлении бандажей, колец и другой продукции специального назначения [1], [2]. Кроме этого, штамповка сложных изделий переменной толщины вдоль радиуса тела вращения может рассматриваться как штамповка отдельных колец с учетом радиального подпора с наружной и внутренней сторон, с учетом боковых граничных условий по напряжениям и деформациям [3]. При такой постановке задачи возникает необходимость разработки математической модели напряженно-деформированного состояния при осадке толстостенных колец с учетом радиального подпора в условиях неоднородного пластического течения.

Так как рассматриваемый метод гармонических функций позволяет решать плоскую задачу теории пластичности применительно к выше сказанным прикладным задачам, возникает необходимость разработать новый математический аппарат в рамках данного метода. В работе рассматривается замкнутое решение осесимметричной плоской задачи теории пластичности.

Постановка задачи определяется системой уравнений теории пластичности, в условиях плоской деформации:

$$\text{уравнение равновесия: } \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0; \quad (1)$$

$$\text{условие пластичности: } (\sigma_{\rho} - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k^2; \quad (2)$$

$$\text{уравнение связи: } \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} = \frac{\xi_{\rho} - \xi_z}{\gamma_{\rho z}}; \quad (3)$$

$$\text{условие несжимаемости: } \xi_{\rho} + \xi_z = 0; \quad (4)$$

$$\text{уравнение неразрывности скоростей деформаций: } \frac{\partial^2 \xi_{\rho}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{\rho z}}{\partial z \partial \rho}. \quad (5)$$

Граничные условия задаются в напряжениях, с учетом тригонометрического распределения напряжений на контакте, т. е.:

$$\tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2\alpha), \quad (6)$$

где  $\sigma, \tau$  – нормальное и касательное напряжение;  $\tau_n$  – контактное касательное напряжение;  $\alpha$  – угол наклона площадки;  $k$  – сопротивление пластическому сдвигу;  $\Phi$  – функция координат  $\rho, z$ , которая подлежит определению;  $A$  – постоянная величина.

В работе [4], [5] получено обобщенное уравнение равновесия, где определяющей функцией является касательное напряжение  $\tau_{\rho z}$ .

$$\frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right) = \pm 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \left( \sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right). \quad (7)$$

Решение дифференциального уравнения (7) согласно [6] имеет вид:

$$\tau_{\rho z} = \left( \frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \cdot \exp \theta \sin A\Phi \quad (8)$$

при выполнении условия:  $\theta_\rho = -A\Phi_z$ ;  $\theta_z = A\Phi_\rho$ . (9)

Целью данной работы является разработка математической модели пластического формоизменения применительно к операции осадки тел вращения с внутренним отверстием (кольца, бандажи, обода). А также, получение замкнутого решения осесимметричной плоской задачи теории пластичности в цилиндрических координатах, которое удовлетворяло бы систему уравнений как в напряжениях, так и в скоростях деформаций.

Подставляя (8) в уравнение равновесия (1), интегрируя с учетом соотношений (9) получим:

$$\sigma_\rho = \left( \frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2C_1 \cdot I_1 + \sigma_0 + f(z) + C; \quad (10)$$

$$\sigma_z = - \left( \frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2C_1 \cdot I_2 + \sigma_0 + f(\rho) + C. \quad (11)$$

Интегралы  $I_1 = \int \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho$ ,  $I_2 = \int \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz$ . Можно показать, что  $I_1 = I_2$ . Равенство интегралов определяется особенностями гармонических функций. В выражениях (10), (11) определены постоянные  $C_1, C_2$  из граничных условий.

Подставляя компоненты тензора напряжений в уравнения связи(3), в общем случае получим:

$$\frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2 \cdot \tau_{\rho z}} = \pm ctg A\Phi; \quad \frac{\xi_\rho - \xi_z}{\gamma_{\rho z}} = \pm ctg B\Phi.$$

С учетом того, что  $\xi_\rho = -\xi_z$ , имеем:

$$\gamma_{\rho z} = \pm 2 \cdot tg B\Phi \cdot \xi_\rho \quad \text{или} \quad \gamma_{\rho z} = \mp 2 \cdot tg B\Phi \cdot \xi_z.$$

Последние выражения позволяют устанавливать связь между линейными скоростями деформаций и сдвиговыми. Уравнение совместности скоростей деформаций (5), с учетом (3) и (4), принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial \rho^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \xi_\rho \cdot tg B\Phi. \quad (12)$$

Разрешающей функцией является величина  $\xi_\rho$ . Для решения задачи в деформациях воспользуемся подстановкой:

$$\xi_\rho = -\xi_z = \beta \cdot \cos B\Phi = H_\xi \cdot \exp \theta' \cdot \cos B\Phi; \quad \gamma_{\rho z} = 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta' \cdot \sin B\Phi, \quad (13)$$

где  $H_\xi$  – функция координат, определяющая деформированное состояние среды;

$\theta'$  – неизвестная функция координат, определяющая распределение интенсивности скоростей сдвига в зоне формоизменения.

Подставляя зависимости (13) в дифференциальное уравнение (12), получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ H_\xi \cdot \left[ -\theta'_{\rho\rho} - (\theta'_\rho + B\Phi_z)^2 + \theta'_{zz} + (\theta'_z - B\Phi_\rho)^2 \right] - (H_\xi)_{\rho\rho} - 2 \cdot (H_\xi)_\rho \cdot (\theta'_\rho + B\Phi_z) + (H_\xi)_{zz} + \right. \\ & \left. + 2 \cdot (H_\xi)_z \cdot (\theta'_z - B\Phi_\rho) \right\} \cdot \sin B\Phi + \left\{ 2 \cdot H_\xi \cdot (B\Phi_\rho - \theta'_z) \cdot (\theta'_\rho + B\Phi_z) - 2 \cdot (H_\xi)_z \cdot (B\Phi_z + \theta'_\rho) + \right. \\ & \left. + 2 \cdot (H_\xi)_\rho \cdot (B\Phi_\rho - \theta'_z) + H_\xi \cdot (B\Phi_{\rho\rho} - B\Phi_{zz}) \right\} \cdot \cos B\Phi = \\ & 2 \cdot H_\xi \cdot B\Phi_{\rho z} \cdot \sin B\Phi + \left[ 2 \cdot (H_\xi)_{\rho z} + 2 \cdot H_\xi \cdot \theta'_{\rho z} \right] \cdot \cos B\Phi. \quad (14) \end{aligned}$$

Операторы при тригонометрических функциях содержат одинаковые скобки  $(\theta'_\rho + ВФ_z)$  и  $(\theta'_z - ВФ_\rho)$ . Принимая скобки равными нулю, получаем соотношения Коши-Римана между неизвестными функциями, т. е.:

$$\theta'_\rho = -ВФ_z; \quad \theta'_z = ВФ_\rho.$$

Дифференцируя по координатам, имеем:

$$\theta'_{\rho\rho} = -ВФ_{z\rho}; \quad \theta'_{zz} = ВФ_{\rho z}; \quad \theta'_{\rho z} = ВФ_{zz} = -ВФ_{\rho\rho}.$$

Последние соотношения при подстановке в (14) превращают его в тождество, при условии, что:

$$(H_\xi)_{\rho\rho} - (H_\xi)_{zz} = 0, \quad (H_\xi)_{\rho z} = 0. \quad (15)$$

Одним из вариантов решения (15) является зависимость:

$$H_\xi = C'_\xi(\rho^2 + C'_{\xi 2} \cdot \rho + C'_{\xi 3}) + C'_\xi(z^2 + C''_{\xi 2} \cdot z + C''_{\xi 3}) + C_\xi,$$

Можно принять, что  $H_\xi = C_\xi$  тогда решение упростится.

Функции  $\theta'$  и  $ВФ$  имеют ограничения (9), определяющие их класс. Они, как и  $\theta$  и  $АФ$ , удовлетворяют уравнению Лапласа, являются гармоническими, т. е.:

$$\theta'_{\rho\rho} + \theta'_{zz} = 0, \quad ВФ_{\rho\rho} + ВФ_{zz} = 0. \quad (16)$$

Последние уравнения позволяют определить вид функций для деформированного состояния среды. С учетом (8), (10), (11) и (13) напряженно-деформированное состояние определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \left( \frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \right) \exp\theta \cdot \cos АФ + \sigma_0 + C; \quad \sigma_z = - \left( \frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \right) \exp\theta \cdot \cos АФ + \sigma_0 + C \\ \tau_{\rho z} &= \left( \frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \right) \cdot \exp\theta \sin АФ \quad \text{при} \quad \theta_\rho = -АФ_z; \quad \theta_z = АФ_\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xi_\rho = -\xi_z &= \beta \cdot \cos ВФ = H_\xi \cdot \exp\theta' \cdot \cos ВФ, \quad \gamma_{\rho z} = 2 \cdot H_\xi \cdot \exp\theta' \cdot \sin ВФ, \\ \text{при} \quad \theta'_\rho &= -ВФ_z, \quad \theta'_z = ВФ_\rho. \end{aligned} \quad (18)$$

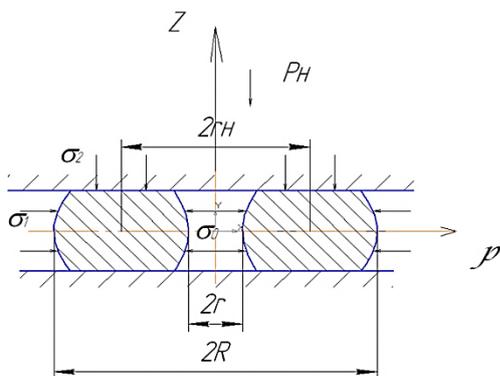


Рис. 1. Схема осадки толстостенной трубы

Рассмотрим осадку толстостенной трубы в осевом направлении с учетом внешнего и внутреннего подпоров  $\sigma_1$  и  $\sigma_0$ . На рис. 1. представлена схема осадки толстостенной трубы. Задачу решим в напряжениях. Воспользуемся выражениями (17) для анализа напряженного состояния. Решая уравнение Лапласа, определяем функцию  $АФ$  с учетом соотношений Коши-Римана и уравнения Лапласа определяем гармоническую функцию  $\theta$ .

При осадке толстостенной трубы при отсутствии подпора  $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$  наблюдается

асимметрия в распределении контактных напряжений по длине осаживаемой стенки. Металл растекается относительно нейтрального сечения в противоположные стороны, что вызывает контактные силы трения противоположного знака. Нормальные и касательные напряжения реагируют на изменение фактора формы  $S/h$  и коэффициента трения  $f$ .

С учетом выражений (17) определим постоянные интегрирования  $C_1, C_2$ .

Запишем граничные условия:

$$1. \text{ При } \rho = r, z = \frac{h}{2}, \theta = \theta_0, A\Phi = A\Phi_0, \sigma_\rho - \sigma_z = 2k_0 + \sigma_0 = 2k_0\xi_0; \xi_0 = 1 + \frac{\sigma_0}{2k_0}.$$

$$2. \text{ При } \rho = R, z = \frac{h}{2}, \theta = \theta_1, A\Phi = A\Phi_1, \sigma_z - \sigma_\rho = 2k_1 + \sigma_1 = 2k_1\xi_1; \xi_1 = 1 + \frac{\sigma_1}{2k_1}.$$

При подстановке предельных условий имеем систему уравнений:

$$2k_0\xi_0 = 2\left(C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}\right) \cdot \exp\theta_0 \cdot \cos A\Phi_0; \quad 2k_1\xi_1 = 2\left(C_1 \cdot R + \frac{C_2}{R}\right) \cdot \exp\theta_1 \cdot \cos A\Phi_1,$$

где  $\xi_1, \xi_0$  – значения, которые определяют величину подпора на внешнем и внутреннем диаметре.

Решая систему относительно  $C_1, C_2$ , имеем:

$$C_1 = \frac{1}{R^2 - r^2} \left[ R \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos A\Phi_1} - r \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos A\Phi_0} \right];$$

$$C_2 = \frac{R \cdot r}{R^2 - r^2} \left[ R \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos A\Phi_0} - r \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos A\Phi_1} \right].$$

Подставляя исходные выражения в (17), получим:

$$\sigma_\rho = - \left[ \frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos A\Phi + k_0; \quad (19)$$

$$\sigma_z = -3 \left[ \frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos A\Phi + k_0; \quad (20)$$

$$\tau_{\rho z} = \left[ \frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \sin A\Phi. \quad (21)$$

С целью анализа выражений (19), (20) и (21) были проведены расчеты напряжения на контакте. Построены графики распределения напряжений на контакте, рис. 2–5.

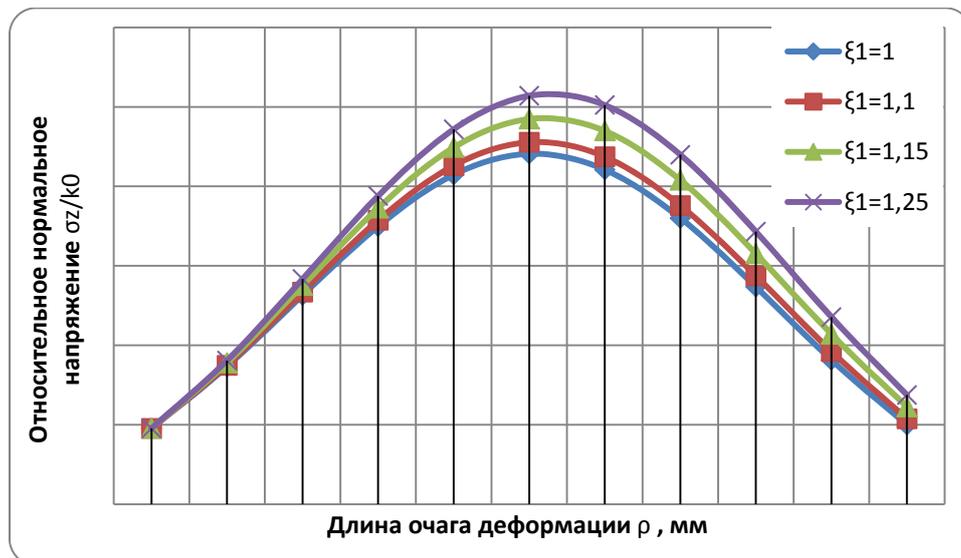


Рис. 2. Распределение относительного нормального напряжения при факторе формы  $S/h = 5$ ; коэффициенте трения  $f = 0,5$ ;  $\xi_1 = 1-1,25$ ;  $\xi_0 = 1$

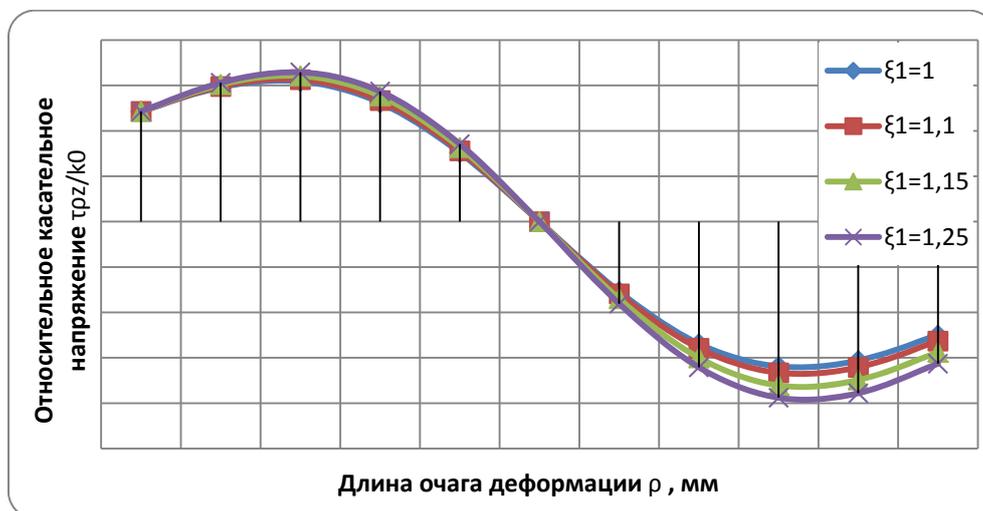


Рис. 3. Распределение относительного касательного напряжения при факторе формы  $S/h = 5$ ; коэффициенте трения  $f = 0,5$ ;  $\xi_1 = 1-1,25$ ;  $\xi_0 = 1$

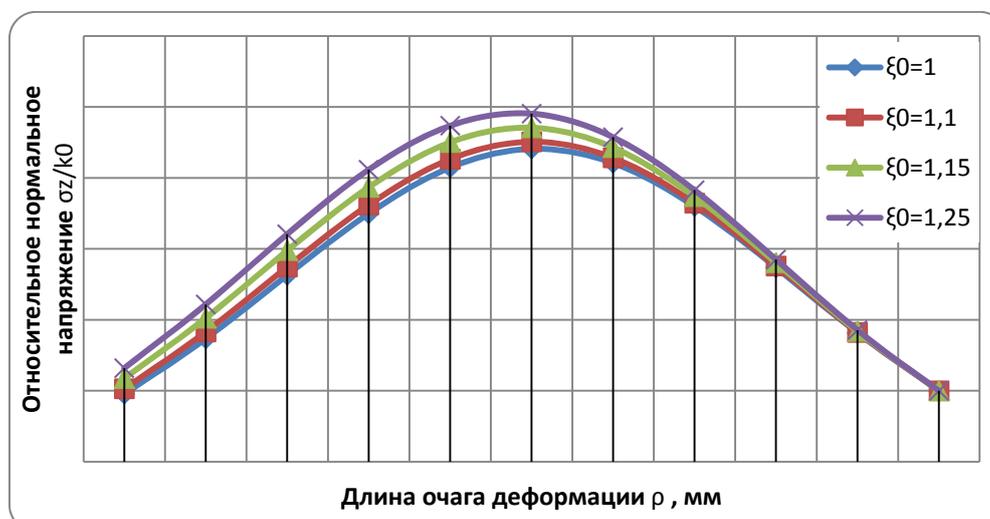


Рис. 4. Распределение относительного нормального напряжения при факторе формы  $S/h = 5$ ; коэффициенте трения  $f = 0,5$ ;  $\xi_1 = 1$ ;  $\xi_0 = 1-1,25$

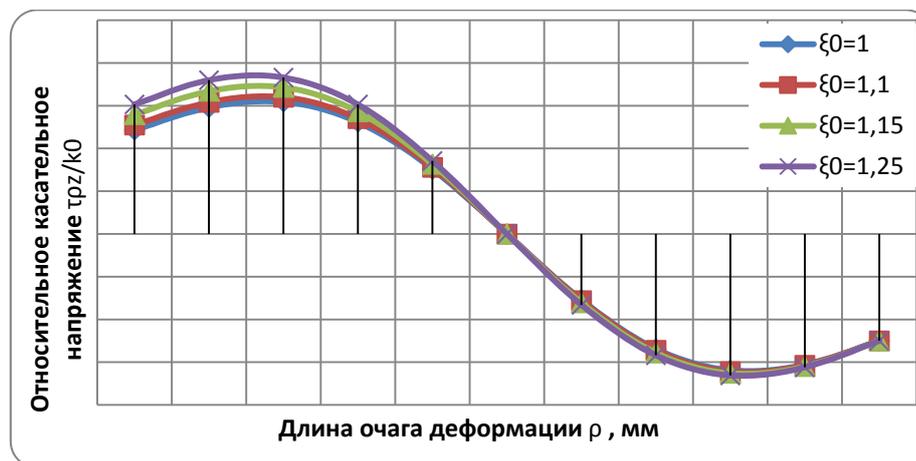


Рис. 5. Распределение относительного касательного напряжения при факторе формы  $S/h = 5$ ; коэффициенте трения  $f = 0,5$ ;  $\xi_1 = 1$ ;  $\xi_0 = 1-1,25$

В математической модели учитывается влияние подпора  $\xi_0, \xi_1$  со стороны внутренней и наружной поверхности трубы. Пределы изменения этой нагрузки показаны на рис. 2–5, и их влияние на контактные напряжения. С увеличением подпора увеличивается контактные напряжения со стороны подпирającego усилия.

### ВЫВОДЫ

Получено замкнутое решение осесимметричной плоской задачи теории пластичности в цилиндрических координатах. Решение удовлетворяет систему уравнений и в напряжениях и в скоростях деформаций. Получены рабочие выражения для определения компонентов тензора напряжений в цилиндрических координатах, которые учитывают влияние фактора формы, коэффициента трения и внешнего, наружного подпоры. Получены результаты расчета напряжений по толщине стенки трубы при различном радиальном подпоре.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория обработки металлов давлением / И. Я. Тарновский, О. А. Поздеев, О. А. Ганаго, В. Л. Колмогоров [и др.]. – М. : Металлургия, 1963. – 672 с.
2. Малинин Н. Н. Технологические задачи пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Высш. школа, 1979. – 119 с.
3. Яковченко А. В. Проектирование профилей и калибровок железнодорожных колес : монография / А. В. Яковченко, Н. И. Ивлева, Р. А. Гольшиков. – Донецк : Донецкий национальный технический университет, 2008. – 491 с.
4. Плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах / В. В. Чигиринский, О. М. Силенко, С. А. Силенко, А. Ю. Матюхин // Прогрессивные технологии пластической деформации. – М. : МИСиС, 2009. – С. 345–351.
5. Чигиринський В. В. Рішення осесиметричної плоскої задачі теорії пластичності в напруженнях / В. В. Чигиринський, С. А. Силенко, А. Ю. Матюхін // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2010. – № 1. – С. 121–125.
6. Чигиринський В. В. Розробка математичної моделі радіального тиску пластичного середовища при осадці полів тіл обертання / В. В. Чигиринський, А. Ю. Матюхін, В. В. Падалка // Вісник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2011. – № 62. – С. 46–50.
7. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ЗНТУ;

Матюхин А. Ю. – аспирант ЗНТУ, ассистент ЗНТУ.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: mco2005@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 02.03.2012 г.